

國立新竹高工 113 學年度第一學期技高二數學科期末考試題

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、選擇題：(4 題，共 20 分)

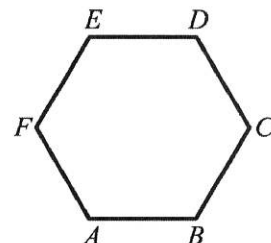
1. () 在空間坐標系中，下列敘述何者正確？

(A) xy 平面的方程式為 $xy=0$ (B) yz 平面的方程式為 $y=0$

(C) zx 平面的方程式為 $x=0$ (D) $z=0$ 表一平面

2. () 如右圖， $ABCDEF$ 為空間中的一個正六邊形，下列哪一個選項的值最大？

(A) $|\vec{AB} \times \vec{AB}|$ (B) $|\vec{AB} \times \vec{BE}|$ (C) $|\vec{AB} \times \vec{AC}|$ (D) $|\vec{AB} \times \vec{CF}|$



3. () 關於行列式的性質，下列敘述何者正確？

(A) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 1 \\ g & h & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$ (C) $\begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} = 0$ (D) $\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & i \end{vmatrix} = 0$

4. () 已知 $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{4}{x} - \frac{9}{y} = -1 \end{cases}$ ，則下列何者正確？

(A) $x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -9 \end{vmatrix}}$ ， $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}$ (B) $x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}$ ， $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}$

(C) $x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}$ ， $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -9 \end{vmatrix}}$ (D) $x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}$ ， $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}$

二、填充題：(20 格，共 80 分)

1. 試求行列式 $\begin{vmatrix} 2021 & 2022 & 2023 \\ 2022 & 2023 & 2024 \\ 2023 & 2024 & 2026 \end{vmatrix}$ 的值為_____。

2. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ ，若 $5X - A + B = 2A + 3X$ ，求 $X =$ _____。

3. 設方陣 $A = \begin{bmatrix} x & -2 \\ x-3 & x-1 \end{bmatrix}$ 沒有乘法反方陣，則所有解 x 的和為_____。

【第二頁尚有試題，請翻頁】

4. 聯立方程式 $\begin{cases} 2x-3y+4z=12 \\ x-2y+z=-5 \\ 3x+7y+2z=1 \end{cases}$ ，若利用列運算將增廣矩陣化為 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & b & 22 \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$ ，則 $a+b+c=$ _____。

5. 已知坐標空間中有三點 $A(1,2,3)$ 、 $B(3,4,7)$ 、 $C(2,5,2)$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為_____。

6. 阿毛正在展示遊戲設計圖，該生在程式中畫出了一個射擊平面，且空間坐標系中 $(2,4,5)$ 位置有一支雷射槍將雷射光射向平面上的 $(1,2,3)$ 位置。已知雷射光與平面垂直，試求阿毛計時輸入程式中之平面方程式為_____。(請以一般式 $ax+by+cz+d=0$ 表示)

7. 若空間中的三平面分別為 $E_1: x-y+az=1$ 、 $E_2: bx+y+z=4$ 、 $E_3: x+cy+z=2$ ，若 $E_1 \perp E_2$ 且 $E_1 \parallel E_3$ ，試求數對 $(a,b,c)=$ _____。

8. 小沈於估計某平行六面體建築物體積時(不考量牆面厚度)，利用程式先拉出三個展成此平行六面體體積之向量分別為 $\vec{OA}=(2,2,7)$ 、 $\vec{OB}=(4,-3,5)$ 、 $\vec{OC}=(-1,2,6)$ ，已知坐標系中每單位長代表 1 公尺，請問此平行六面體體積為_____立方公尺。

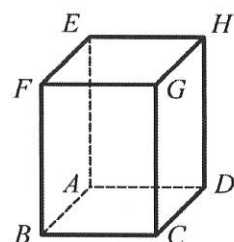
9. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ ，試求矩陣 $A^{10} =$ _____。

10. 設 $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix} = 6$ ， $\begin{vmatrix} a & d & l \\ b & e & m \\ c & f & n \end{vmatrix} = -5$ ，則行列式 $\begin{vmatrix} 3a & -2d & 4g+5l \\ 3b & -2e & 4h+5m \\ 3c & -2f & 4k+5n \end{vmatrix}$ 的值為_____。

11. 已知實數 x 滿足 $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 2 & 2-x & 2 \\ 4 & 4 & 4-x \end{vmatrix} = 0$ ，試求所有解 $x =$ _____。(有兩解)

12. 若聯立方程式 $\begin{cases} x+2y-6z=-3 \\ 2x+3y-4z=2 \\ 3x+4y-2z=k \end{cases}$ 有解，試求 $k =$ _____。

13. 如右圖，有一長方體結構的空間，內部長度分別為 $\overline{AB}=4$ 公尺、 $\overline{AD}=6$ 公尺與 $\overline{AE}=8$ 公尺，此空間經 5 級地震後結構受損，因此土木技師打算在此空間內加上兩條鋼條 \overline{AG} 與 \overline{DF} ，用以撐住最遠的兩頂點來補強結構，若兩鋼條之銳夾角為 θ ，



試求 $\cos \theta =$ _____。

14. 已知 $A(3,1,0)$ 、 $B(-2,4,1)$ 兩點與平面 $E: x+2y-3z+5=0$ ，若直線 AB 交平面 E 於 P 點，試求 $\overline{AP} : \overline{BP} =$ _____。(請化為最簡整數比)

15. 已知空間中三點 $A(3,1,2)$ 、 $B(11,1,-6)$ 、 $C(9,7,2)$ ，則 C 點在直線 AB 上的投影點坐標為_____。

【第三頁尚有試題，請翻頁作答】

16. 試求通過 $A(2,1,-1)$ 、 $B(1,1,2)$ ，且與平面 $7x+4y-4z=0$ 垂直的平面方程式為_____。(請以一般式 $ax+by+cz+d=0$ 表示)

17. 為了提高接收效率，太陽能板之板面須一直保持和太陽光垂直。假設地面為 xy 平面，發現通過點 $A(3,2,4)$ 的太陽光射到太陽能板 E 上的點 $B(2,2,3)$ ，試求平面 E 與地面的銳夾角為_____。

18. 科幻影片中，常常出現使用機械手臂代替真人操作的情景。操作時，需輸入一些指令來使機械手臂正確朝想要進行的方向前進，再透過細微手動調整機械手臂到達位置。已知控制機械手臂可能前進方向的向量為 \vec{n} ，輸入指令之向量為 $\vec{a}=(1,1,3)$ 、 $\vec{b}=(1,-2,1)$ ，且 \vec{n} 、 \vec{a} 、 \vec{b} 之間的關係為 \vec{n} 同時與 \vec{a} 及 \vec{b} 垂直，試求機械手臂可能前進方向 \vec{n} 之單位向量為_____。(答案有兩個)

19. 相傳包子是三國時白羅家族發明的。孔明最喜歡吃他們所做的包子，因此白羅包子店門庭若市，一包難求，必須一大早去排隊才買得到。事實上，白羅包子店只賣一種包子，每天限量供應 999 個，且規定每位顧客限購三個；而購買一個、兩個或三個包子的價錢分別是 8、15、21 分錢。在那三國戰亂的某一天，包子賣完後，老闆跟老闆娘有如下的對話：老闆說：「賺錢真辛苦，一個包子成本就要 5 分錢，今天到底賺了多少錢？」，老闆娘說：「今天共賣了 7195 分錢，只有 432 位顧客買到包子。」若當天購買一個、兩個及三個包子的人數分別為 x, y, z 人，試求序對 $(x, y, z) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

20. 情報員常用矩陣方程式交換密碼。首先用矩陣進行編碼： a 以 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 表示， b 以 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ 表示， c 以 $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ 表示，……， z 以 $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ 表示。如單字「yes」以 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ 表示，其餘類推。今天阿喬情報員與線民要約定一個地點交換情報。他們為了保密，將某英文字母按上述編碼，再以矩陣 X 表示，並且透過計算 AX 的加密動作後再傳出矩陣 B (亦即 $AX=B$)。又矩陣 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，假設兩人收到的內容為矩陣 $B=\begin{bmatrix} 16 & 6 & 10 & 21 \\ 8 & 3 & 6 & 11 \end{bmatrix}$ ，則他們必須到哪裡交換情報？_____。(答案請寫出其英文名稱)

【試題結束】